CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE DE L'AIR

1ère epreuve à option Mathématiques T-TA

durée : 3h coefficient : 9

Les deux problèmes sont indépendants. L'attention des candidats est attirée sur le fait qu'il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la justification des affirmations présentées.

PROBLEME I

Texte

i) $M_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrice carrées à n lignes et n colonnes, à coefficients complexes.

ii) Si $M \in M_n(\mathbb{C})$, Spec (M) désigne l'ensemble des valeurs propres de M ; un vecteur colonne X sera dit vecteur propre de M, associé à la valeur propre λ, s'il est non nul et si $MX = \lambda X$. Si $\lambda \in$ Spec (M), on désigne par E_λ l'ensemble des vecteurs colonnes Z tels que $MZ = \lambda Z$.

iii) Si N est une matrice et si V est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{C}^n)$, on note $N.V = \left\{ NM \quad / \quad M \in V \right\}$.

I)

I.1. Montrer que $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, Spec $(A) \neq \emptyset$.

I.2. Soient A et B appartenant à $M_n(\mathbb{C})$, telles que $AB = BA$.

I.2.a. Montrer que si $\lambda \in$ Spec (A), $B.E_\lambda \subset E_\lambda$.

Montrer que si $\mu \in$ Spec (B), $A.E_\mu \subset E_\mu$.

I.2.b. Montrer qu'il existe un vecteur propre commun aux matrices A et B.

I.2.c. Montrer qu'il existe une matrice inversible P telle que,

si $P^{-1}AP = (\alpha_{ij})_{\substack{i=1,\ldots n \\ j=1,\ldots n}}$ et $P^{-1}BP = (\beta_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}}$

alors $\forall i \in \{2,\ldots,n\} \quad \alpha_{i1} = \beta_{i1} = 0$.

I.2.d. Si $A' = (\alpha_{ij})_{\substack{i=2,\ldots,n \\ j=2,\ldots,n}}$ et $B' = (\beta_{ij})_{\substack{i=2,\ldots,n \\ j=2,\ldots,n}}$

Comparer A'B' et B'A'.

On admettra par la suite le résultat suivant : si A et B appartiennent à $M_n(\mathbb{C})$ et commutent entre elles, il existe une matrice S inversible telle que $S^{-1}AS$ et $S^{-1}BS$ soient triangulaires supérieures.

II) A et B étant deux matrices appartenant à $M_n(\mathbb{C})$ fixées, on s'intéresse à $E = \{ Y \in M_n(\mathbb{C}) \ / \ AY - YB = 0 \}$.

II.1. Montrer que les applications :

$\mathcal{A} : Y \longmapsto AY$

$\mathcal{B} : Y \longmapsto YB$

sont des endomorphismes du $\mathbb{C}$ - espace vectoriel $M_n(\mathbb{C})$.

II.2. Comparer $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ et $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$.

II.3. On désigne par Spec $(\mathcal{A})$ (respectivement Spec $(\mathcal{B})$ l'ensemble des valeurs propres de l'endomorphisme $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$).

Montrer que $\begin{cases} \text{Spec } (\mathcal{A}) = \text{Spec } (A) \\ \text{Spec } (\mathcal{B}) = \text{Spec } (B) \end{cases}$

II.4. On considère $\mathcal{F} = \mathcal{A} - \mathcal{B}$.

II.4.a. Soient $(\lambda , \mu) \in \text{Spec } (A) \times \text{Spec } ({}^tB)$;

Soit X un vecteur propre de A associé à λ,

Soit Y un vecteur propre de ${}^tB$ associé à μ .

Montrer que $X{}^tY$ est un vecteur propre de l'endomorphisme $\mathcal{F}$, déterminer la valeur propre associée.

II.4.b. Montrer que si $\alpha \in \text{Spec}(\mathcal{F})$, $\exists\ (\lambda,\mu) \in \text{Spec}(A) \times \text{Spec}({}^tB)$ tels que $\alpha = \lambda - \mu$.

II.4.c. Montrer que $\text{Spec}(B) = \text{Spec}({}^tB)$.

II.4.d. En déduire Spec $(\mathcal{F})$.

II.5. Montrer que $\mathcal{F}$ est inversible si et seulement si $\text{Spec}(A) \cap \text{Spec}(B) = \emptyset$.

II.6. <u>Exemple</u>

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Déterminer $\{ Y \in M_3(\mathbb{C}) \ / \ AY - YB = 0 \}$.

(On remarquera que A a une valeur propre double).

PROBLEME II

Soit un point $Q(\theta)$, du cercle unité dans le plan euclidien orienté $(O ; \vec{i} , \vec{j})$, de coordonnées polaires $(1 , \theta)$; $\vec{\tau}(\theta)$ est le vecteur de coordonnées $(-\sin\theta , \cos\theta)$ dans la base $(\vec{i} , \vec{j})$.

On considère le vecteur unitaire $\vec{k}$ tel que $(\vec{i} , \vec{j} , \vec{k})$ soit une base orthonormée directe.

1 - Déterminer les composantes dans $(O ; \vec{i} , \vec{j} , \vec{k})$ du vecteur unitaire $\vec{C}(\theta)$ du plan $(\vec{\tau}(\theta), \vec{k})$ défini, dans le repère orthogonal direct $(\vec{\tau}(\theta), \vec{k}, \vec{\tau}(\theta) \wedge \vec{k})$, par $(\vec{\tau}(\theta), \vec{C}(\theta)) = \frac{\pi - \theta}{2}$.

2 - On désigne par $D(\theta)$ la droite passant par $Q(\theta)$ et de vecteur directeur $\vec{C}(\theta)$. Déterminer l'équation paramétrique de la droite $D(\theta)$ en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ et de θ .

3 - Soit (S) la surface engendrée par les droites $(D(\theta))_{\theta \in [0 , 2\pi[}$.

On désigne par (π_a) le plan d'équation $z = a$.

3.a. Déterminer $\Gamma_o = (S) \cap (\pi_o)$.

3.b. Déterminer $\Gamma_a = (S) \cap (\pi_a)$; pour $a \neq 0$.

4 -

4.a. Préciser les points doubles de (Γ_a) (on remarquera que le cas $a = -1$ est particulier).

4.b. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$, (Γ_a) contient-elle le point de coordonnées $(0 , 0 , a)$?

5 -

5.a. Déterminer l'équation paramétrique de (Γ_1).

5.b. Déterminer l'équation cartésienne de (Γ_1).

5.c. Représenter la projection orthogonale de la courbe (Γ_1) sur le plan d'équation $z = 0$.

6 -

6.a. Quelle est la nature de (Γ_{-1}) ?

6.b. Déterminer $\left\{ a \in \mathbb{R} \ / \ (\Gamma_a) \text{ contient une droite} \right\}$.